

外国為替市場の注文頻度と取引頻度に対する網羅的分析 —分散共分散とゆらぎのスケーリング—

佐藤 彰洋 *

京都大学 大学院情報学研究科数理工学専攻,

林 高樹 †

慶應義塾大学 大学院経営管理研究科

Janusz A. Hołyst ‡

Faculty of Physics and Center of Excellence for Complex Systems Research,
Warsaw University of Technology

概要

本稿では、外国為替市場の注文頻度 (取引頻度) に対して、ゆらぎのスケーリング指数と分散共分散行列との関係を数理モデルおよび実証的観点から調査した。観測事実を再現する市場参加者の情報到着とその情報に基づく行動を考慮した数理モデルを提案し、理論分析を行った。更に、近年 (2008 年 6 月から 2009 年 11 月) の外国為替市場のゆらぎのスケーリング指数を 1 週間ごとに計量し、

る [2, 3, 4, 5, 6, 7]. 特に, 取引ボリュームや取引回数 (注文回数) と収益率との間に正の同時相関が存在することが報告されており [2, 6, 7], 収益率を取引回数 (注文回数) により正規化できることが知られている. 他方, Mantelbort-Taylor [2], Clark[3] 以来, 時間変更 (time change) あるいは劣化 (subordination) により, 時間軸をトレーディング時間 (ビジネス時間) に変更したガウス過程を考慮することで, 対数収益率のファットテール性を再現する方法論が提案されている. これらの研究では, 取引ボリュームあるいは取引回数 (注文回数) を, 市場に到着する観測不可能な情報到着の代理変数と見なす立場を取っている.

多数の金融商品を取引する市場の, それぞれの参加者への情報到着の様子を全計測することは実験室レベルでは可能でも, 実社会で実行することは現実的でなく, 観測可能でかつ有効な代理変数が必要とされる. ここでは情報到着の結果参加者は行動を起し, 注文を市場に呈示すると考え, 注文回数 (取引回数) を情報到着の代理変数とする立場を採用する.

更に, 市場参加者へ到着する情報の時間構造と相関構造が市場状態 (市場参加者の状態) を特徴付けていると期待されるので, ここでは注文回数 (約定回数) 間の相関構造を介して市場状態を理解する立場を取る. そして, 注文 (取引) 回数の相関構造の計量方法と, それを記述するために市場参加者の行動生起を考慮したモデルを発展させることを目指す.

特に, 行動の生起確率にゆらぎを考慮し, 混合ポアソン過程を用いた多変量モデルを用い, 多数の金融商品の取引回数 (注文回数) を多変量時系列とみて, これらから計算される分散共分散行列と, 平均と標準偏差との間に成立するゆらぎのスケーリング則の再現を通じて, ゆらぎのスケーリング指数が相関構造を代表する変数となり得ることを論ずる.

ゆらぎのスケーリング則とは体系中で観測されるある種の流量に関する多変量時系列に対して, その平均値と標準偏差との間で確認されるスケーリング関係

$$(\text{標準偏差}) = C \times (\text{平均値}) \quad (1/2 \leq \alpha \leq 1) \quad (1)$$

である.

ゆらぎのスケーリング則は 1950 年代に Taylor が生態系において平均個体数とその変化について調べた研究 [8] に起源を持ち, その後様々な分野においてゆらぎのスケーリング関係の調査が行なわれている. 例えば, Menezes と Barabasi は交通流や河川の水量, インターネットにおけるブラウジング行動などについてゆらぎのスケーリング関係を計量している [9]. Eisler らは証券市場で取引されるボリュームに対してゆらぎのスケーリング則を計測している [10]. ゆらぎのスケーリングに関する研究では, 外性的要因 (内性的要因) が体系に対して支配的であるある場合, スケーリング指数が $1(1/2)$ の値を取ると結論付けられている.

更に, 本報告では, 外国為替市場の近年の通貨取引データ (2008 年 6 月から 2009 年 11 月) を用い, 長期間にわたるゆらぎのスケーリング指数の計量を行った結果を報告する.

2 モデル

N 種類の金融商品が M 人の市場参加者により取引される金融市場のモデルを考える. i 番目 ($i = 1, \dots, N$) の金融商品を取引する参加者の人数を M_i と表記し, 相対頻度を $K_i = M_i/M$ により定義する. 金融商品 i に参加する市場参加者は, このグループ固有の情報と市場共通の情報を知覚し, 行動すると考える. そして, 商品のある単位時間当りの注文回数あるいは取引回数 n_i を, 市場固有の情報到着確率 q ($0 \leq q \leq 1$) とグループ固有の情報到着確率 q_i ($0 \leq q_i \leq 1$) で指定される $M_i = k_i M$ 個からなる Bernoulli 変数の和として $Bin(M_i, q + q_i - qq_i)$ なる 2 項分布からサ

ンプルする. ここで, q_i と q は, それぞれ, 確率密度関数 $G(q)$ と $G_i(q_i)$ からサンプルされる確率変数であると仮定する.

q, q_i, q_j が互いに独立であり, M が十分大きく $q + q_i - qq_i$ が十分小さいとすると, 二項分布を Poisson 分布で近似することができ, n_i の確率分布, および n_i と n_j の結合確率として

$$F_j(n_j) = \int_0^1 dq \int_0^1 dq_j G(q) G_j(q_j) \frac{SM_j(q + q_j)}{n_j!} e^{-SM_j(q + q_j)}, \quad (2)$$

$$F_{lm}(n_l, n_m) = \int_0^1 dq \int_0^1 dq_l \int_0^1 dq_m G(q) G_l(q_l) G_m(q_m) \quad (3)$$

$$\times \frac{S^2 M_l(q + q_l) M_m(q + q_m)}{n_l! n_m!} e^{-SM_l(q + q_l) - SM_m(q + q_m)}. \quad (4)$$

を得る. これらを用いることにより, n_i の平均値および n_i, n_j の分散共分散はそれぞれ

$$\langle n_j \rangle = K_j LM(\langle q \rangle + \langle q_j \rangle), \quad (5)$$

$$\text{Cov}(n_l, n_m) = \begin{cases} K_l K_m L^2 M^2 \sigma_q^2 & (l \neq m) \\ K_l LM(\langle q \rangle + \langle q_l \rangle) + K_l^2 L^2 M^2 (\sigma_q^2 + \sigma_{q_l}^2) & (l = m) \end{cases}, \quad (6)$$

と得られる. ここで, $\langle q \rangle = \int_0^1 q G(q) dq$, $\langle q_l \rangle = \int_0^1 q_l G_l(q_l) dq_l$, $\sigma_q^2 = \int_0^1 (q - \langle q \rangle)^2 G(q) dq$, $\sigma_{q_l}^2 = \int_0^1 (q_l - \langle q_l \rangle)^2 G_l(q_l) dq_l$ である.

3 パラメータ推定とモデルによる再現

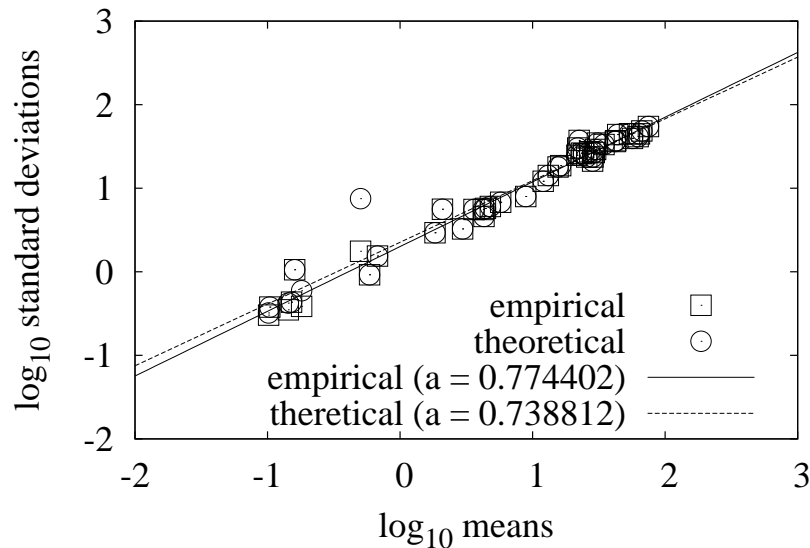


図 1: 2007 年 6 月 4 日 1:40 から 9:40(UTC+2) の注文回数時系列から計算された平均値と標準偏差との両対数プロット.

提案モデルでは, $(3N + 2)$ 個のモデルパラメータ $\langle q \rangle, \sigma_q^2, \langle q_l \rangle, \sigma_{q_l}^2, K_l$ ($l = 1, \dots, N$) を含んでいて. ここでは, モデルパラメータを金融市場において観測される実測値から推定する方法について

2007/06/04 01:40(UTC+2) : Asia (A): <Cemp> = 0.320531, <Cthe> = 0.403964

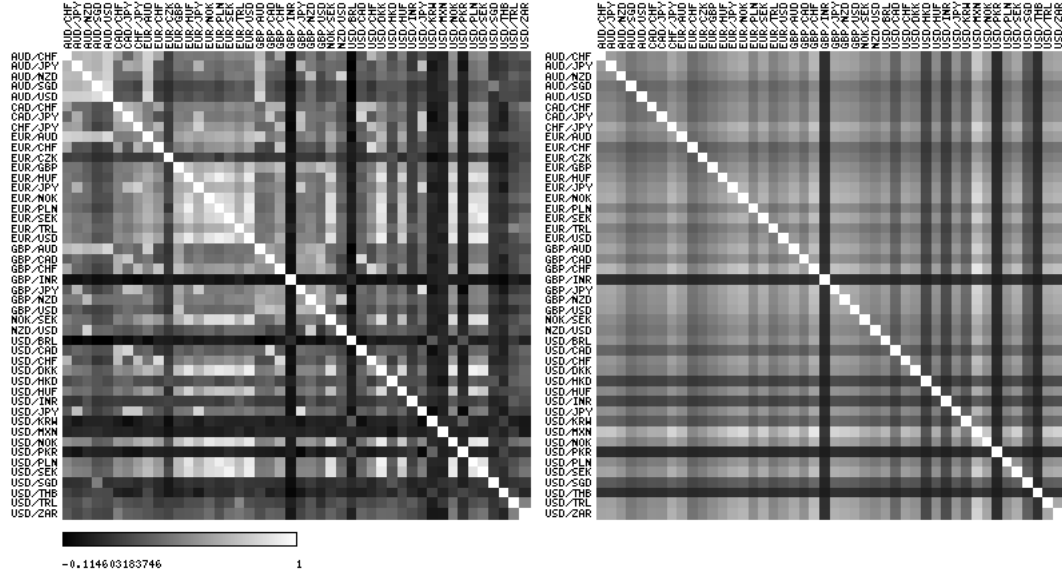


図 2: 2007 年 6 月 4 日 1:40 から 9:40(UTC+2) の注文回数時系列から計算された共分散行列 (左) と 2007 年 6 月 4 日から 8 日までの注文回数時系列を用いて推定されたパラメータを用いてモデルから計算された共分散行列 (右).

述べる. $X_{j;\Delta t}(k)$ ($j = 1, \dots, N; k = 0, \dots, Q - 1$) を商品 j の期間 $[k\Delta t, (k + 1)\Delta t)$ における市場への注文到着 (約定発生) 回数であるとする. この $X_{j;\Delta t}(k)$ の観測回数から商品 j のシェアを

$$K_j = \frac{\sum_{k=0}^{Q-1} X_{j;\Delta t}(k)}{\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{Q-1} X_{j;\Delta t}(k)} \quad (7)$$

により推定し, $0 < R < Q$ を満たす R を用いて実証的な平均値と共分散行列を

$$\langle X_{j;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s) = \frac{1}{R} \sum_{k=s}^{s+R-1} X_{j;\Delta t}(k), \quad (8)$$

$$\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s) = \frac{1}{R} \sum_{k=s}^{s+R-1} (X_{l;\Delta t}(k) - \langle X_{l;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s)) (X_{m;\Delta t}(k) - \langle X_{m;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s)) \quad (9)$$

により求める. そして, 平均値と分散共分散行列に対する実測値と理論値との間の自乗誤差

$$e^2 = \sum_{j=1}^N (\langle X_{j;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s) - \langle n_j \rangle)^2 + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N (\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s) - \text{Cov}(n_l, n_m))^2 \quad (10)$$

を最小化するようにパラメータを選ぶ:

$$(\langle q \rangle + \langle q_j \rangle)(s) = \frac{\langle f_{j;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s)}{K_j S M}, \quad (11)$$

$$\sigma_q^2(s) = \frac{\sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N \text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s) K_l K_m}{S^2 M^2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N (K_l K_m)^2}, \quad (12)$$

$$\sigma_{q_j}^2(s) = \frac{\text{Cov}_{jj;\Delta t}^{\text{emp}}(s) - \langle f_{j;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s)}{K_j^2 S^2 M^2} - \sigma_q^2(s). \quad (13)$$

CQG社 [11] が提供している 2007 年 6 月 4 日の外国為替市場で取引された 24 通貨² からなる 46 種類の通貨ペア³ の注文頻度時系列に対して提案アルゴリズムを用いた分析を行った。

(11)-(13) 式を用いてパラメータを推定し、このパラメータを (5),(6) 式に代入して平均値と分散共分散行列の計算を行った。図. 1 は実測のゆらぎのスケーリング則および推定したパラメータを用いてモデルから計算されるゆらぎのスケーリング則を示したものである。外国為替市場の注文回数の変量時系列は平均値と標準偏差に対してよいスケーリング関係を示していることがわかる [12]。これは、平均値の小さな通貨ペアの注文回数には小さなゆらぎが認められ、平均値の大きな通貨ペアの注文回数には大きなゆらぎが認められることを意味している。更に、提案モデルを用い、実測のスケーリング関係をよく再現できることが確認される。図. 2 に実測の分散共分散行列と推定したパラメータを用いてモデルから計算された分散共分散行列を示す。両者の傾向には類似性のあることが確認される。

共分散行列 $\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s)$ の平均値を

$$\langle \text{Cov}_{\Delta t}(s) \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{l>m} \text{Cov}_{lm;\Delta t}(s) \quad (14)$$

により定義し、ゆらぎのスケーリング関係

$$\sqrt{\text{Cov}_{ll;\Delta t}(s)} = C(s) \langle X_{l;\Delta t} \rangle^{\text{emp}}(s) \quad (15)$$

から得られるスケーリング指数 $\alpha(s)$ と分散共分散 $\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s)$ から計算される相関係数

$$C_{lm;\Delta t}(s) = \frac{\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s)}{\sqrt{\text{Cov}_{ll;\Delta t}^{\text{emp}}(s)} \sqrt{\text{Cov}_{mm;\Delta t}^{\text{emp}}(s)}} \quad (16)$$

の平均値

$$\langle C \rangle(s) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{l=1}^N \sum_{m=l+1}^N C_{lm;\Delta t}(s) \quad (17)$$

との散布図を s を変化させることにより描き、線形回帰を行った。図. 3 は散布図の一例である。線形回帰の結果、決定係数 $R^2 = 0.96$ で $\alpha(s)$ と $\text{Cov}_{lm;\Delta t}^{\text{emp}}(s)$ の間に線形的な関係があることを確認した。

提案モデルから推定されるパラメータ値の傾向から、ゆらぎのスケーリング指数が $1(1/2)$ に近いとき、 $\langle q \rangle + \langle q_j \rangle$ が全体的に大きな (小さな) 値を取る傾向がある。

4 スケーリング指数の観測期間依存性

1 日内の実証分析においてゆらぎのスケーリング指数 α と相関係数の平均値との間に明らかな関連があることが分かった。更に、理論モデルからスケーリング指数が 1 に近い値ととる場合、注文生起の確率は平均的に共通して上昇する傾向があることが分かった。本節では、長期間にわたる

²NZD, AUD, JPY, KRW, SGD, HKD, THB, PKR, INR, TRL, ZAR, CZK, PLN, HUF, SEK, NOK, DKK, EUR, CHF, GBP, CAD, MXN, BRL, USD からなる 24 種類の通貨を含む。

³AUD/CHF, AUD/JPY, AUD/NZD, AUD/SGD, AUD/USD, CAD/CHF, CAD/JPY, CHF/JPY, EUR/AUD, EUR/CHF, EUR/CZK, EUR/GBP, EUR/HUF, EUR/JPY, EUR/NOK, EUR/PLN, EUR/SEK, EUR/TRL, EUR/USD, GBP/AUD, GBP/CAD, GBP/CHF, GBP/INR, GBP/JPY, GBP/NZD, GBP/USD, NOK/SEK, NZD/USD, USD/BRL, USD/CAD, USD/CHF, USD/DKK, USD/HKD, USD/HUF, USD/INR, USD/JPY, USD/KRW, USD/MXN, USD/NOK, USD/PLN, USD/SEK, USD/SGD, USD/THB, USD/TRL, USD/ZAR からなる 46 種類の通貨ペアを対象とした。

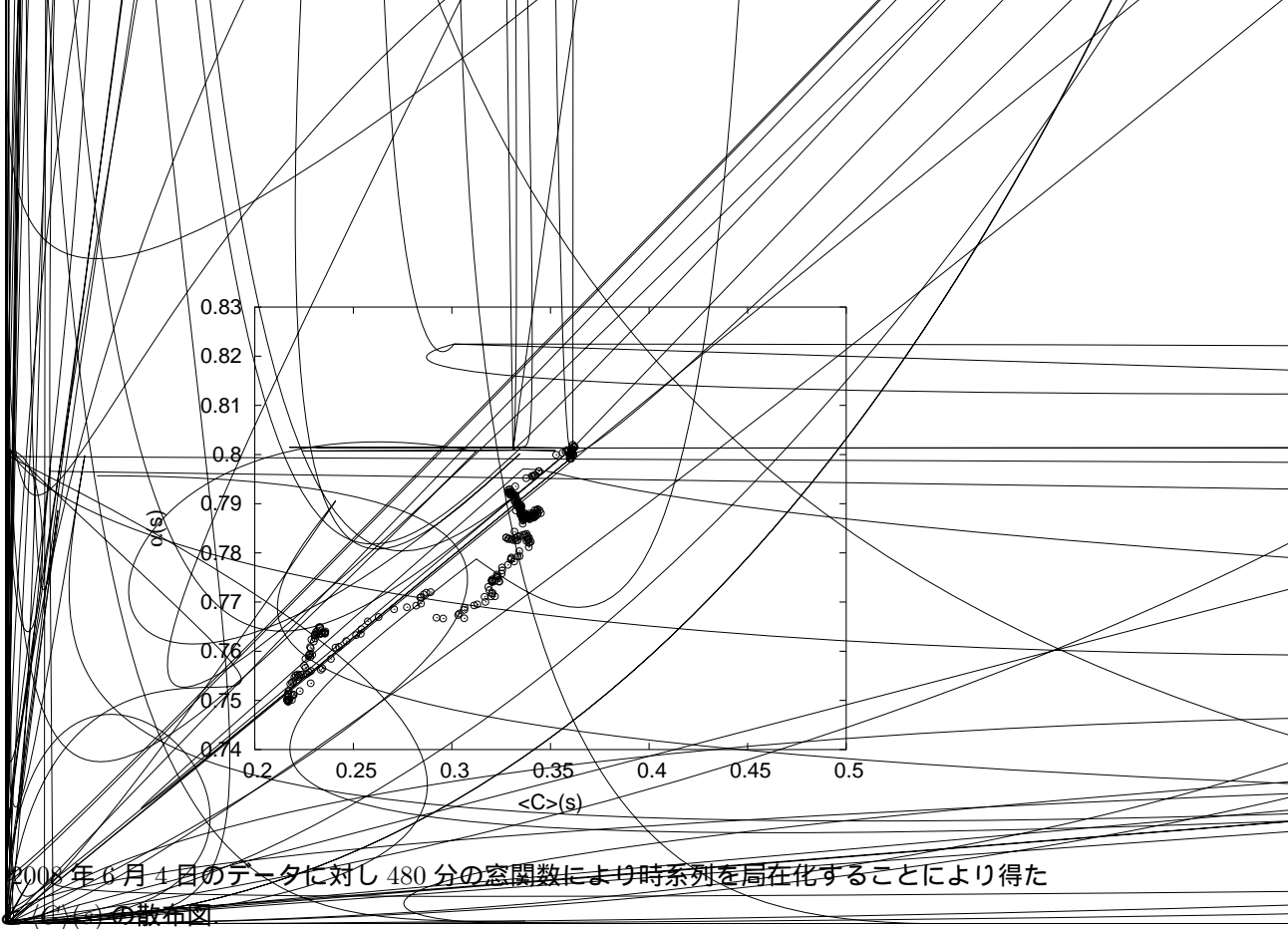


図 3: 2008 年 6 月 4 日のデータに対し 480 分の窓関数により時系列を局在化することにより得た $\alpha(s)$ ($\langle C \rangle(s)$) の散布図

データに対し、一週間ごとにスケーリング指数を計算し、スケーリング指数の観測期間依存性を通じて相関構造の期間変化を調べる。

外国為替市場で取引される全ての通貨ペアにわたる分析を行うために、ICAP EBS Platform により収集された、Data Mine Level 1.0 を用いて分析を行った。ICAP EBS Platform は世界中の約 800 のディーリングルームで 2,000 名以上のトレーダによって利用されている電子ブローキングシステムである [13]。

このデータは通貨および商品取引の注文 (BID/OFFER) ・約定に関する高解像度データであり、2008 年 6 月から 2009 年 11 月まで (17ヶ月間) を分析対象とした⁴。図. 4 に 1 分間ごとの全通貨注文および取引の回数のスナップショットを図す。この図では、通貨をノード (数字はその通貨が関係する回数を表す)、通貨注文 (約定) の生起回数をノード間の重み付きリンクとしてネットワーク構造を用いて表現している。時々刻々と通貨取引の状況が変化していくことが理解される。

このデータを用いて、1 週間ごとに各通貨ペアの注文回数 (約定回数) に対する時間平均と標準偏差の関係を調べた。通貨 j と通貨 k の交換関係を j/k と表記し、通貨ペア j/k を交換するために市場参加者が時間間隔 $[t\Delta, (t+1)\Delta]$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$) にブローキングシステムへ投入した注文回数 (約定回数) を $X_{jk;\Delta}(t)$ と書き、時間平均と標準偏差をそれぞれ

$$\langle X_{jk} \rangle(\Delta) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_{jk;\Delta}(t), \quad \sigma_{jk}(\Delta) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (X_{jk;\Delta}(t) - \langle X_{jk} \rangle(\Delta))^2}, \quad (18)$$

により定義する。図 5 に 2009 年 10 月 23 日から 30 日までの 1 週間分のデータを用い、 $\Delta = 1[\text{min}]$ とした場合の時間平均と標準偏差との間の両対数プロットを示す。

⁴分析期間中に 31 通貨からなる以下の 49 通貨ペアの存在を確認した。AUD/NZD, AUD/USD, CHF/JPY, EUR/CHF, EUR/CZK, EUR/DKK, EUR/GBP, EUR/JPY, EUR/NOK, EUR/PLN, EUR/SEK, EUR/USD, GBP/USD, NZD/USD, USD/CAD, USD/CHF, USD/HKD, USD/JPY, USD/MXN, USD/SGD, USD/ZAR, XAG/USD, XAU/USD, XPD/USD, XPT/USD, EUR/ISK, EUR/HUF, USD/RUB, GBP/JPY, USD/PLN, GBP/CHF, EUR/SKK, AUD/JPY, USD/TRY, USD/THB, CAD/JPY, NZD/JPY, ZAR/JPY, EUR/RUB, EUR/AUD, EUR/CAD, GBP/AUD, USD/SEK, EUR/RON, BKT/RUB, USD/NOK, USD/ILS, USD/DKK, SAU/USD。2008 年 6 月から 2009 年 11 月までの全期間で確認されたレコード総数は 123,958,633 であった。

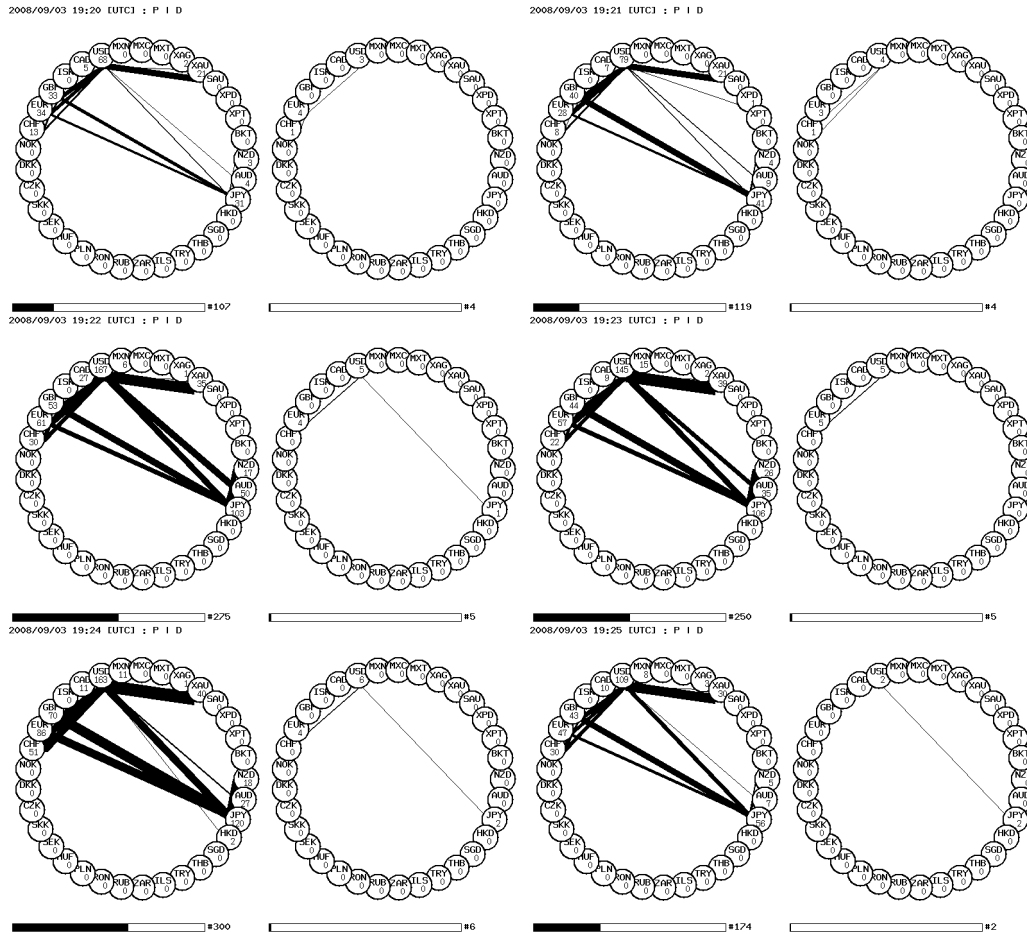


図 4: 通貨注文 (P) と通貨約定 (D) の全状態に関するネットワーク表現のスナップショット (2008 年 9 月 3 日 19 時 22 分から 19 時 26 分まで)。1 分間に生じた注文と取引をネットワーク構造を用いて可視化している。通貨間を結ぶ重み付きリンクは生起回数に比例して太線により描いている。

分析から、時間平均値と標準偏差との間に以下のことを見出した。

- (1) 対数プロット上で平均と標準偏差との間には直線的な関係があり、 $\sigma_{jk}(\Delta) \propto \langle X_{jk} \rangle(\Delta)^{\alpha}$ ($1/2 \leq \alpha(\Delta) \leq 1$) によりスケーリングすることができる。
- (2) $\alpha(\Delta)$ は Δ に対する単調増加関数である。
- (3) 1 週間ごとの時系列を用いて算出したスケーリング指数 α は観測期間に依存して $0.5 < \alpha < 0.7$ の範囲で変動する⁵。

注文回数のゆらぎのスケーリング関係から求めたスケーリング指数 α の値が急激に減少する 2008 年 8 月と 2009 年 2 月の時期は通貨交換レートが大きく変化した時期とがおおかた一致している。取引回数から計測されるゆらぎのスケーリング関係は 2009 年 8 月頃に注文回数同様に急激に減少している。通貨交換レートが大きく変化するような市場の荒れ具合とスケーリング指数 α の変化との間には関連があると考えられる。

⁵ $\alpha = 1/2$ のとき、注文の生起は独立に生起し、 $\alpha = 1$ のとき、注文行動の生起は同期して生じることを簡単なモデルから示すことができるので、 α の観測期間依存性は市場参加者の注文行動の同期性の期間変動と関係していると予想される。

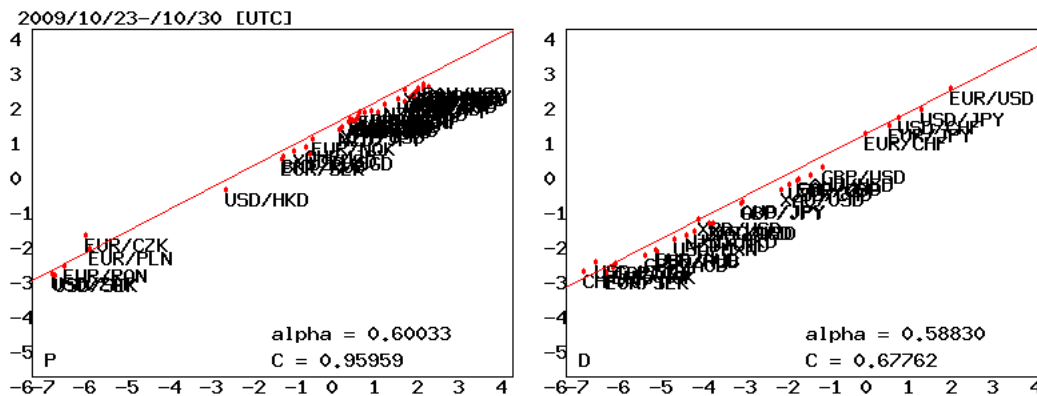


図 5: 2007 年 6 月 11 日から 15 日までの $\Delta = 1[\text{min}]$ とした時系列の平均値と標準偏差との両対数プロット. 点は各通貨ペアの平均値と標準偏差の関係を表わしている. 注文回数 (左), 約定回数 (右).

5 結論

本報告では, ゆらぎのスケーリング則について実証分析とモデル分析を行った. 確率変動を有する多変量複合ポワソンモデルによって注文回数の市場全体での振る舞いをモデル化した. モデル分析の結果, $\langle q_i \rangle + \langle q \rangle$ が各通貨ペア全体で大きな (小さな) 値を示す場合, ゆらぎのスケーリング指数は $1(1/2)$ に近い値を取ることがわかった.

また, 実証分析の結果, スケーリング指数は相関の平均値とよく連動していることがわかった. すなわち, 相関が全体的に大きいときスケーリング指数は 1 に近づき, 相関が全体的に小さいときスケーリング指数は $1/2$ に近い値と取る. 更に, 近年の外国為替市場の高解像度データの分析から, ゆらぎのスケーリング指数と外国為替市場参加者の状態とが連動していることを示唆する結果を得た.

今後の課題として, 通貨交換レートの振舞いとゆらぎのスケーリング指数との間の定量分析および, 市場参加者の直感的理解とスケーリング指数との関係を調べる必要がある. 更に, 他の金融市場や社会システムにおいて, ゆらぎのスケーリング則の計測を行い, 経済社会システムにおいてゆらぎのスケーリング関係の普遍性を示す必要がある.

謝辞

本研究は, 佐藤に対しては科学研究費補助金若手研究 (B) (#21760059) の財政的支援の下で, 林に対しては石井記念証券研究振興財団の助成の下で行われた. また, 本研究は統計数理研究所平成 21 年度共同研究「ランダム行列理論の社会 / 金融システムへの応用」(課題番号: 2037) の一環として行い, 関連の共同研究集会である, 統計数理研究所共同研究集会「経済物理学とその周辺」(課題番号: 5004) に於いて, 平成 21 年度第 1 回研究会 (2009 年 9 月 8-9 日, 京都大学基礎物理学研究所「経済物理 2009」との共催) で発表した内容, および第 2 回研究会 (2010 年 3 月 8-9 日) で発表予定の内容を含みます. 上記共同研究のメンバーである, 統計数理研究所の田村義保教授, 日本大学の相馬亘准教授, 新潟大学の家富洋教授, および鳥取大学の田中美栄子教授には, 有益なご助言を頂きました. ここに深く感謝の意を表します.

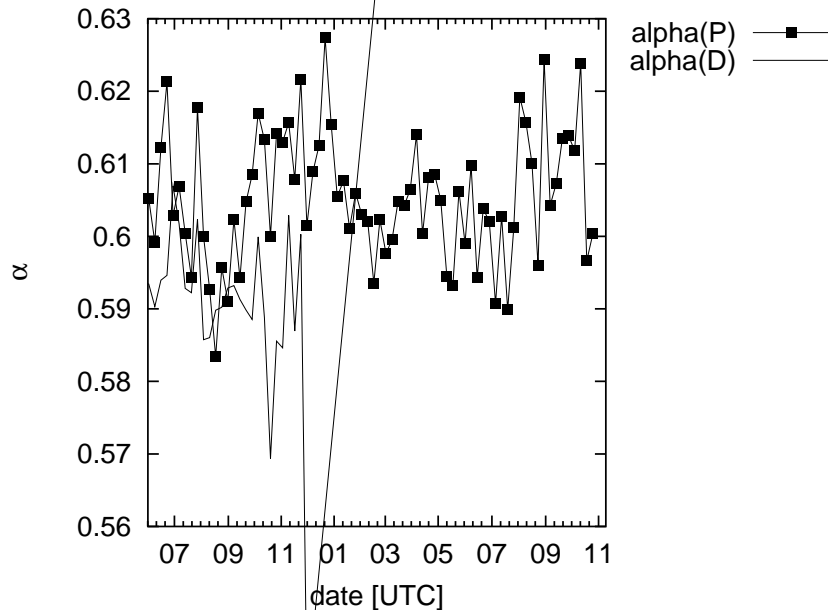


図 6: 2008 年 6 月から 2009 年 11 月までの 1 週間ごとの注文回数 (P) と約定回数 (D) のゆらぎのスケールリング指数.

参考文献

- [1] ” 情報爆発時代におけるわくわくする IT の創出を目指して”, 情報処理, **49** (2008) 879.
- [2] B. Mandelbrot and H.M. Taylor, Operations Research, **15**, 1057–1062 (1967)
- [3] P. Clark, Econometrica, **41**, 135 (1973)
- [4] T. Tauchen, and M. Pitts, Econometric Society, **51**, 485–506 (1983)
- [5] M. Richardson, and T. Smith, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **29**, 101–116 (1994)
- [6] J. Karpoff, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **22**, 109–126 (1987)
- [7] T. Ane and H. Geman, Journal of Finance, **55**, 2259–2284 (2000)
- [8] L.R. Taylor, Nature, **189** (1961) 732–735.
- [9] M.A. de Menezes, A.-L. Barabási, Physical Review Letters, **92** (2004) 028701-1–028701-4.
- [10] Z. Eisler, I. Bartos, and J. Kertész, Advances in Physics, **57**, 89–142 (2008)
- [11] The data is purchased from CQG: <http://www.cqg.com>
- [12] A.-H. Sato, H. Sakai, M. Nishimura, and J.A. Hołyst, Progress of Theoretical Physics Supplement, **179**, 38–50 (2009).
- [13] The data is purchased from ICAP EBS: <http://www.icap.com>