1　確率微分方程式

Einstein による揺動散逸定理の導出以降, Langiven により提案された揺動項を含む常微分方程式は確率微分方程式として理論体系が構築されていく．ここでは Itô 型の確率微分方程式について説明し, 確率微分方程式の性質について調べる.

1.1　確率密度

1.1.1　確率密度と累積分布関数

連続事象では確率の代りに**確率密度**(probability density) と**累積分布関数**(cumulative distribution function) を用いる．累積分布関数は相対頻度を用いて

$$\Pr[X \leq x] = \lim_{n\to\infty} \frac{n[X \leq x]}{n} \tag{1}$$

により定義する．ここで, $n[X \leq x]$ とは観測量 X が x 以下である回数を表わし, n は全観測回数であるため累積分布関数は確率である．累積分布関数は図. 1 に示すように, x に関する単調増加関数で,

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq \infty] &= 1 & (2)\\ \Pr[X \leq -\infty] &= 0 & (3)\\ 0 \leq \Pr[X \leq x] &\leq 1 & (4) \end{aligned}$$

を満す.

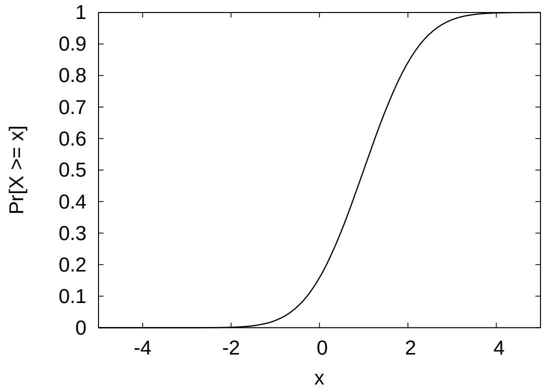

Figure 1: 累積分布関数の例. $\mu = 1$, $\sigma = 1$ の正規分布.

このの $\Pr[X \leq x]$ を用いて, x が区間 $[a, b]$ に見出される確率を $\Pr[a \leq X \leq b] = \Pr[X \leq b] - \Pr[X \leq a]$ で求めることができる．区間 $[a, b]$ の幅 $b - a$ を小さくし

ていくと確率は 0 となるが

$$\lim_{a \to b} \frac{\Pr[a \le X \le b]}{b - a} = p(b) \tag{5}$$

は有限の値を取る．この $p(b)$ を確率密度という．すなわち，

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Pr[X \le x] \tag{6}$$

である．または，

$$p(x)\mathrm{d}x = \Pr[x \le X \le x + \mathrm{d}x] \tag{7}$$

とも書く．

例．正規分布 (ガウス分布)

確率密度関数の例として**正規分布**(normal distribution) または**ガウス分布**(Gaussian distribution) と呼ばれるものがある．これは平均値パラメータ μ, 分散パラメータ σ^2 として，

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big] \tag{8}$$

と書かれる．この正規分布は独立な確率変数の和が従う確率分布である (中心極限定理)．正規分布の累積分布関数は

$$\Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} p(x')\mathrm{d}x' = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\Big(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\Big) \tag{9}$$

と計算でき议率汽鑁福謙笭ゲでき议率⑥

lim(

を用いることにより,

$$p_{X_1,\ldots,X_N}(x_1,\ldots,x_N) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\cdots p_{X_N|X_1,\ldots,X_{N-1}}(x_N|x_1,\ldots,x_{N-1}) \tag{14}$$

と展開することができる.

1.1 Markov process

1 次元のランダム過程 $x(t)$ と離散的に取り出したストロボ時間

$$\ldots < t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \ldots \tag{15}$$

を考える. t のサブスクリプトが負のとき, t_0 より過去, 正のとき, t_0 より未来を意味する.

$x(t_0) = x_0, x(t_{-1}) = x_{-1}, x(t_{-2}) = x_{-2}$

1.2 確率微分方程式

次のノイズを有する微分方程式を考える.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t) + g(x,t)\xi(t) \tag{23}$$

$\xi(t)$ を白色ノイズと仮定する. 白色ノイズは以下の性質をもつノイズである.

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2). \tag{24}$$

Dirac のデルタ関数

$\delta(t)$ は **Dirac のデルタ関数**(Dirac's δ-function) である. $\delta(t)$ は

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \tag{25}$$

で与えられ, 以下の性質を満す.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{26}$$

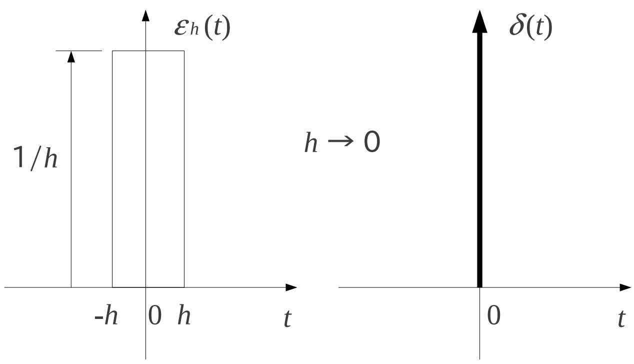

Figure 2: Dirac のデルタ関数の模式図.

Dirac のデルタ関数は関数の極限としていくつかの方法で定義できるが, ここでは図. 2 に示す矩形の極限の例を示す. $\epsilon_h(t)$ を区間 $[-h/2, h/2]$ で値 $1/h$ を持つ矩形関数であるとする.

$$\epsilon_h(t) = \begin{cases} 1/h & (-h/2 \leq t \leq h/2) \\ 0 & (t < -h/2, t > h/2) \end{cases} \tag{27}$$

この区間幅 h を小さくしていくと次第に高さ方向には大きくなり $h \to 0$ の極限で Dirac のデルタ関数となる.

$$\lim_{h\to 0} \epsilon_h(t) = \delta(t) \tag{28}$$

アンサンブル平均

$\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均と呼ばれる異なる実現に対する平均をあらわす.

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t). \tag{29}$$

1.3 確率積分

$x_k = x(t_k)$, $\xi(t_k) = \xi_k$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ と書くと, (23) 式は

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, t_k)\Delta t_k + g(x_k, t_k)\xi_k \Delta t_k \\ x_k &= x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j, t_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} g(x_j, t_j)\Delta W_j \end{aligned} \tag{30}$$

となる. ここで $\xi_k \Delta t_k = \Delta W_k$ とおいた. $\Delta t_j \to 0$ としたとき $\sum$ は $\int$ に置きかえられ

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x,t)\mathrm{d}t + \int_0^t g(x,t)\mathrm{d}W \tag{31}$$

と書く. このとき

$$\int_0^t g(x,t)\mathrm{d}W$$

はノイズを含む積分であるため**確率積分**(stochastic integral) と呼ばれる.

特に, 区間の左端点での $g(x_j, t_j)$ を用いて総和

$$\sum_{j=0}^{k-1} g(x_j, t_j)[W_{j+1} - W_j] = \int_0^t g(x,t)\mathrm{d}W$$

を取るとき Itô 積分と呼ぶ. Itô 積分は以下の性質を持つ.

$$\int_{t_1}^{t_3} g\mathrm{d}W = \int_{t_1}^{t_2} g\mathrm{d}W + \int_{t_2}^{t_3} g\mathrm{d}W \tag{32}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (ch+g)\mathrm{d}W = c\int_{t_1}^{t_2} h\mathrm{d}W + \int_{t_1}^{t_2} g\mathrm{d}W \tag{33}$$

$$\left\langle \int_{t_1}^{t_2} g\mathrm{d}W \right\rangle = 0 \tag{34}$$

1.4　Wiener 過程

確率積分の性質をより理解するために $\xi_k \Delta t_k = \Delta W_k$ すなわち

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \xi(t) \tag{35}$$

を調べてみよう. (35) 式の形式解は

$$W(t) = \int_0^t \xi(t')\mathrm{d}t' \tag{36}$$

である. ここで, Wiener 過程の増分

$$\Delta W = W(t_2) - W(t_1) = \int_0^{t_2} \xi(t')\mathrm{d}t' - \int_0^{t_1} \xi(t')\mathrm{d}t' = \int_{t_1}^{t_2} \xi(t')\mathrm{d}t' \tag{37}$$

を考える.

期待値は

$$\langle \Delta W \rangle = \left\langle \int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{t_1}^{t_2} \langle \xi(t) \rangle \mathrm{d}t = 0 \tag{38}$$

となる. 更に, 分散は

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta W)^2 \rangle &= \langle [W(t_2) - W(t_1)]^2 \rangle \\
&= \left\langle \int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\mathrm{d}t \int_{t_1}^{t_2} \xi(s)\mathrm{d}s \right\rangle \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s \langle \xi(t)\xi(s) \rangle \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s \delta(t-s) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = t_2 - t_1
\end{aligned} \tag{39}$$

と計算される. ここで, 二重積分の範囲は図. 3 に示すようになっていることに注意されたい. 同様に, $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ に対して, $\Delta W_1 = W(t_2) - W(t_1)$ と $\Delta W_2 = W(t_4) - W(t_3)$ を考えこれらの共分散を計算する.

$$\begin{aligned}
\langle \Delta W_1 \Delta W_2 \rangle &= \langle [W(t_2) - W(t_1)][W(t_4) - W(t_3)] \rangle \\
&= \left\langle \int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\mathrm{d}t \int_{t_3}^{t_4} \xi(s)\mathrm{d}s \right\rangle \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{t_3}^{t_4} \mathrm{d}s \langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{40}$$

ここで, 二重積分の範囲は図. 4 に示すようになっていることに注意されたい.

以上から ΔW は平均 0, 分散 $t_2 - t_1$, 相関は 0 であり互いに独立であることわがかる. この $W(t)$ を **Wiener 過程**と呼ぶ. Wiener 過程は拡散現象 (ブラウン) 運動のモデルである.

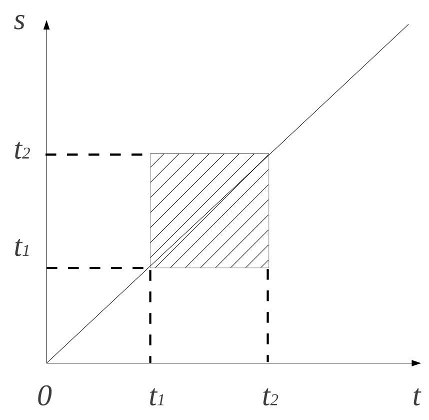

Figure 3: 二重積分の積分範囲. $t_1 < t_2$ の場合.

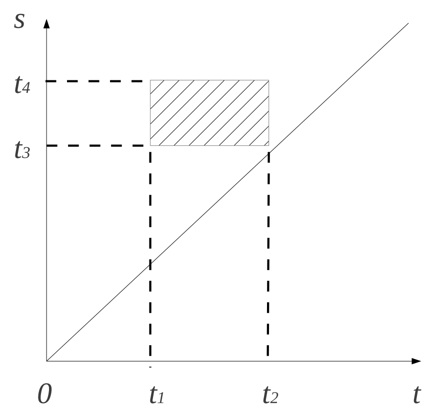

Figure 4: 二重積分の積分範囲. $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ の場合.

例.

確率積分

$$\int_0^t s\mathrm{d}W = tW(t) - \int_0^t W(s)\mathrm{d}s \tag{41}$$

を計算せよ.

　先ず,

$$\sum_j \Delta(s_j W_j) = \sum_j s_j \Delta W_j + \sum_j W_{j+1}\Delta s_j \tag{42}$$

が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}\sum_j \Delta(s_j W_j) &= \sum_j (s_{j+1}W_{j+1} - s_j W_j) \\ &= \sum_j (W_{j+1}s_{j+1} - W_{j+1}s_j + W_{j+1}s_j - s_j W_j) \\ &= \sum_j (W_{j+1} - W_j)s_j + \sum_j W_{j+1}(s_{j+1} - s_j) \\ &= \sum_j s_j \Delta W_j + \sum_j W_{j+1}\Delta s_j\end{aligned}$$

よって, $\Delta s_j \to 0$ とすることにより $\sum$ を $\int$ に置き換えて

$$tW(t) = \int_0^t W(s)\mathrm{d}s + \int_0^t s\mathrm{d}W \tag{43}$$

となるので,

$$\int_0^t s\mathrm{d}W = tW(t) - \int_0^t W(s)\mathrm{d}s \tag{44}$$

が得られる.

1.5 伊藤の公式

$$\mathrm{d}X(t) = u\mathrm{d}t + v\mathrm{d}W \tag{45}$$

で定義される確率微分方程式を考える.

$$Y(t) = g\big(t, X(t)\big) \tag{46}$$

なる変数変換 (g は 2 回連続的微分可能な関数) を行うと, $\mathrm{d}Y(t)$ は

$$\mathrm{d}Y(t) = \frac{\partial g}{\partial t}\big(t, X(t)\big)\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}\big(t, X(t)\big)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\big(t, X(t)\big)(\mathrm{d}X)^2 \tag{47}$$

を満す. ただし, $(\mathrm{d}X)^2 = \mathrm{d}X \cdot \mathrm{d}X$ は

$$\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}W = \mathrm{d}W \cdot \mathrm{d}t = 0, \mathrm{d}W \cdot \mathrm{d}W = \mathrm{d}t \tag{48}$$

で与えられる. この式を**伊藤の公式**(Itô's formula) と呼ぶ. $\mathrm{d}W \cdot \mathrm{d}W = \mathrm{d}t$ とは

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}W\mathrm{d}W \tag{49}$$

が同一視できることを抽象的に表現したものである.

練習問題

以下の等式を導出せよ.

$$\int_0^t W(s)\mathrm{d}W = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t \tag{50}$$